Épreuve de Mathématiques B

Durée 4h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précisions** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leur calculs.

CONSIGNES :

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à encre foncée : bleue ou noire

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

— Le candidat rédigera sur trois copies qu'il intitulera :

- Mathématiques B-1 : Partie I
- Mathématiques B-2 : Partie II
- Mathématiques B-3 : Partie III

et rendra obligatoirement trois copies, même si certaines devaient être blanches, en mettant son numéro d'anonymat sur les trois copies.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie Mathématiques B-2 une feuille de papier millimétré

La partie III peut être traité indépendamment des parties I et II

$\boxed{\text{Partie I}}$ **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques B-I**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Partie I.A)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, dont la dérivée seconde f'' prend des valeurs strictement positives sur I. x_0 désigne un réel de I.

1. Rappeler une équation de la tangente au graphe Γ_f de f au point d'abscisse x_0

2. Pour $x \in I$ on pose $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$

   (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

   (b) Montrer que, pour $x \neq x_0$, $\varphi(x) > 0$

3. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de la fonction f ?

Partie I.B)

On rappelle que l'intégrale de Gauss, qui est une intégrale convergente, donnée par $I_{\mathcal{G}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$, a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $G(x)$ est convergente.

2. Que vaut $G(0)$?

3. Que vaut $G\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

4. (a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0, A]$:
$$\left|\mathrm{e}^{-t} t^x\right| \leqslant \left(1 + t^A\right) \mathrm{e}^{-t}.$$

   (b) Montrer que G est continue sur $[0, A]$.

   (c) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ et exprimer pour tout réel $x \in [0, A]$, $G'(x)$ **sous la forme d'une intégrale**.

   (d) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, A]$ et exprimer pour tout réel $x \in [0, A]$, $G''(x)$ **sous la forme d'une intégrale**.

(e) En déduire que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie II **À rédiger impérativement sur une copie intitulée Mathématiques B-II**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$: $G(x+1) = (x+1)\,G(x)$.

2. Calculer, pour tout entier naturel n : $G(n)$.

3. Pour tout $x > -1$, on pose $\widetilde{G}(x) = \dfrac{G(x+1)}{x+1}$. Montrer que $\widetilde{G}$ prolonge G à l'intervalle $]-1, +\infty[$, et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

4. Montrer qu'au voisinage de -1^+, $\widetilde{G}(x) \sim \dfrac{1}{x+1}$.

5. Exprimer, pour tout réel $x > -1$, $\widetilde{G}''(x)$ à l'aide de x, $G(x+1)$, $G'(x+1)$ et $G''(x+1)$.
En déduire une expression de $(x+1)^3\,\widetilde{G}''(x)$ sous la forme d'une seule intégrale.

6. Étudier le signe du trinôme du second degré $X^2 - 2X + 2$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que $\widetilde{G}''(x) > 0$ pour tout réel $x > -1$.

7. En s'appuyant sur le préambule, que peut-on en déduire concernant le graphe $\Gamma_{\widetilde{G}}$ de $\widetilde{G}$?

8. En comparant $\widetilde{G}(0)$ et $\widetilde{G}(1)$, montrer l'existence d'un réel c de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tel que la courbe représentative de la fonction $\widetilde{G}$ admette, au point d'abscisse c, une tangente horizontale.

9. En déduire le signe de $\widetilde{G}'$, et dresser le tableau de variations de $\widetilde{G}$ sur $]-1, +\infty[$ (on précisera la valeur de $\lim\limits_{x \to -1^+} \widetilde{G}(x)$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} \widetilde{G}(x)$).

10. Tracer l'allure du graphe $\Gamma_{\widetilde{G}}$ de la fonction $\widetilde{G}$ sur la feuille de papier millimétré fournie. On donne : $c \simeq 0,46$ et $\widetilde{G}(c) \simeq 0,89$.

$\boxed{\text{Partie III}}$ **À rédiger <u>impérativement</u> sur une copie intitulée <u>Mathématiques B-III</u>**

Si cette partie n'est pas abordée, le candidat rendra une copie blanche.

Soit F la fonction qui, à tout réel x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$

4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.

5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

6. En déduire le développement en série entière de F.

7. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}$$

8. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Les partie I et II étudient des propriétés de la fonction Gamma d'Euler, qui est, notamment, très utilisée en traitement du signal, par l'intermédiaire des lois de probabilité appelées loi Gamma. Ces lois sont aussi utilisées en ingénierie, pour l'analyse de la fiabilité des systèmes.

La partie III s'intéresse à un développement en série entière, mêlant équations différentielles, suites récurrentes, séries.